Modélisation
des Actions Mécaniques

I- Introduction

LA MECANIQUE

C'est la science mise à notre disposition afin de déterminer : les efforts, les caractéristiques d'un mouvement, les dimensions, les déformations, les conditions de fonctionnement…etc, d'un système

LA STATIQUE

C'est la partie de la mécanique où on réalise l'étude des **solides en équilibre** (pas de mouvement)

- **Buts :** - Dimensionnement d'une pièce
  - Dimensionnement d'une liaison
  - Condition d'équilibre d'un solide
- **Hypothèses :** Les solides sont supposés géométriquement parfaits et indéformables.

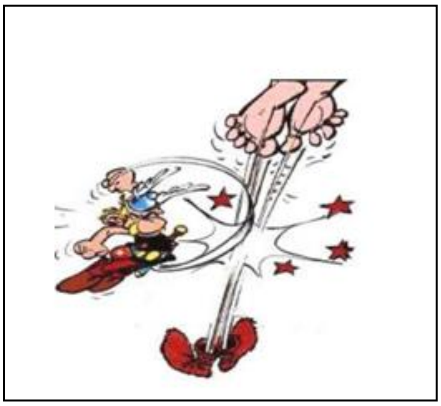
MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

C'est la première phase de la démarche de la statique

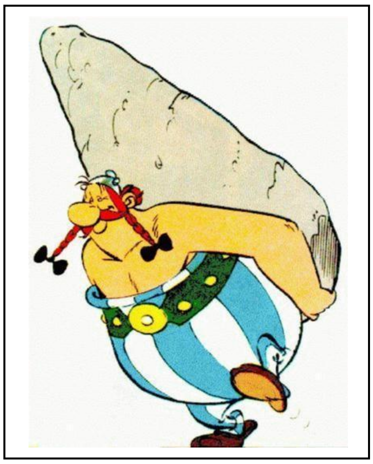
II- Définition d'une Action Mécanique (A M)

Une Action Mécanique est un phénomène physique capable de :

Créer un déplacement



Maintenir un corps en équilibre



Déformer un corps

Modélisation des Actions Mécaniques

Les actions mécaniques sont de deux sortes :

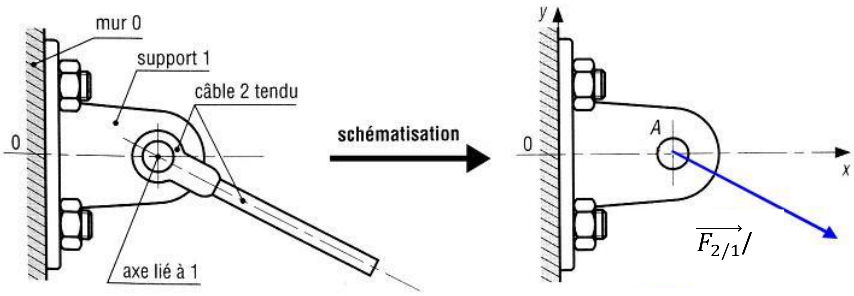
- Les **actions mécaniques à distance** (champ de pesanteur, champ électromagnétique,…)
- Les **actions mécaniques de contact**, exercées par un solide sur un autre solide par l'intermédiaire de leur surface de contact.

III- Notions de force

Les **forces** (aussi appelées **efforts**) sont utilisées en mécanique pour représenter, modéliser ou schématiser les actions mécaniques qui s'exercent entre les solides (action d'un solide sur un autre) ainsi que les actions mécaniques à distance.

III-1) Représentation : Une force est modélisée par un **vecteur-force**, ayant les propriétés générales des vecteurs. Ce vecteur est caractérisé par :

- Son point d'application
- Sa direction (ou support)
- Son sens
- Son intensité ou module en Newton (N)

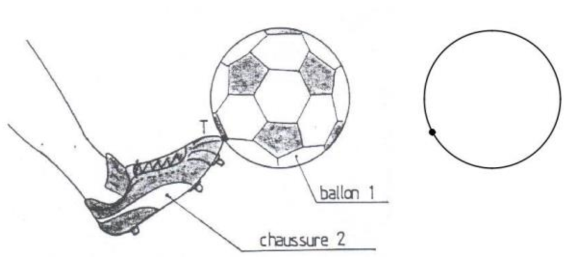


$\|ll\,\vec{F}_{2/1}ll = 1000N\|$

Notation : $\vec{F}_{2/1}$ (aussi noté F2→1) = Effort exercé par la pièce 2 sur 1

Application :

Un footballeur tire avec sa chaussure (2) dans le ballon (1).
Représenter l'action mécanique exercée par la chaussure sur le ballon.



III-2) Théorème des actions mutuelles :

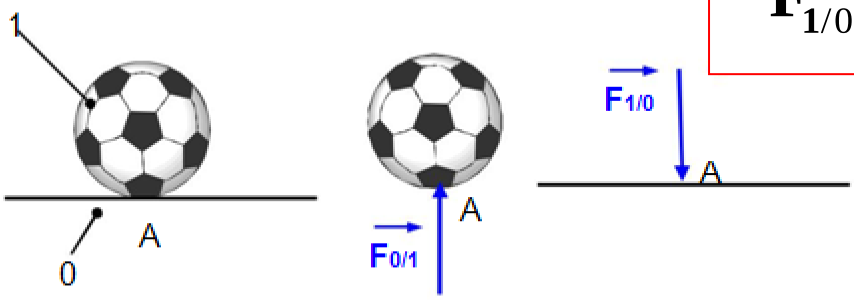
Si un système 1 exerce sur un système 2 une A.M., alors le système 2 exerce sur le système 1 une A.M. exactement opposée.

Ex : une balle de tennis exerce sur la raquette une A.M. exactement opposée à celle qu'exerce la raquette sur la balle.

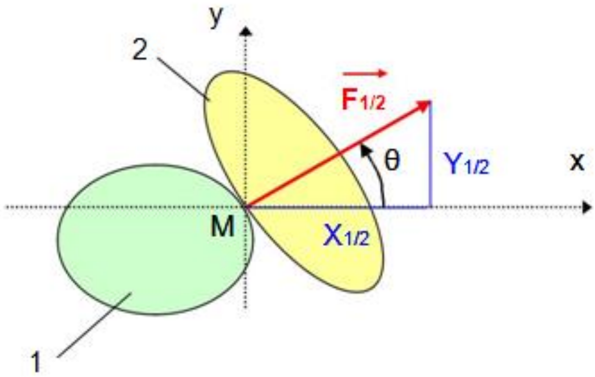
Application :Un ballon est au repos sur le sol. Représenter $\vec{F}_{1/0}$ et $\vec{F}_{0/1}$.

Indiquer la relation entre ces 2 vecteurs.

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}/0} = -\vec{\mathbf{F}}_{0/\mathbf{1}}}$$



III-3) Coordonnées : On identifie un vecteur-force (comme les vecteurs en général) par ses coordonnées (ou composantes) dans un repère donné.



$$\overrightarrow{F_{1/2}}\begin{pmatrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{Y})} \quad \begin{cases} X_{1/2} = F_{1/2}.\cos\theta \\ Y_{1/2} = F_{1/2}.sin\theta \end{cases}$$

$$\|\overrightarrow{F_{1/2}}\| = \sqrt{{X_{1/2}}^2 + {Y_{1/2}}^2}$$

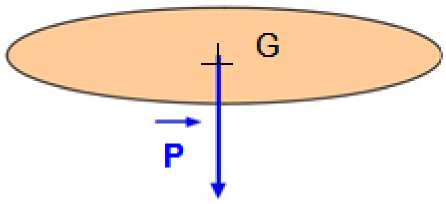
III-4) Une force à distance particulière : la pesanteur

La **pesanteur** ou **attraction terrestre** agit sur tous les solides sous la forme d'une force résultante, dont les caractéristiques sont les suivantes

- **Point d'application : G centre de gravité du solide**
- **Direction : verticale**
- **Sens : vers le bas**
- **Intensité : P = m x g**

(P en Newton)
(m masse en Kg)
(g : accélération de la pesanteur en m/s^2 g= 9.81 m/s^2)

Cette force notée $\vec{P}$ s'appelle le poids.



Application :

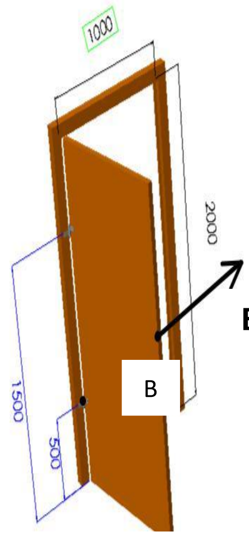
Un ballon de football a une masse de 180g.

Déterminer son poids et représenter le sur la figure ci-contre (à l'échelle de votre choix).

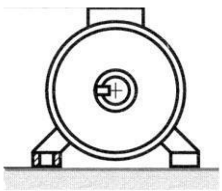
IV- Notions de moment

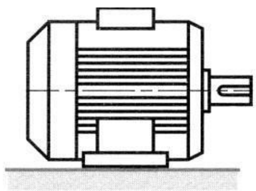
Le **moment d'une force par rapport à un point** est un outil qui permet de mesurer la capacité d'une force à créer un mouvement de rotation autour de ce point.

<u>Ex</u> : le moment de la force de l'utilisateur par rapport au point A est sa capacité à faire tourner la porte autour du point A.



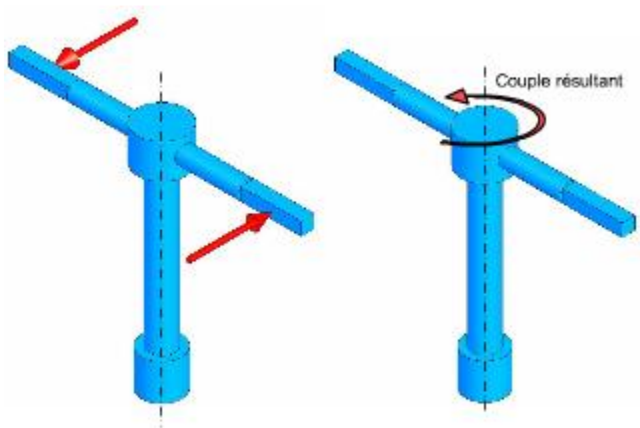
B utilisateur/porte





<u>Autres exemples :</u>
Dans un moteur électrique, les forces électro-magnétiques induites par le stator produisent un **couple** sur le rotor et l'entraîne en rotation.

Un bras qui tire, un bras qui pousse, les deux forces étant égales et opposées.

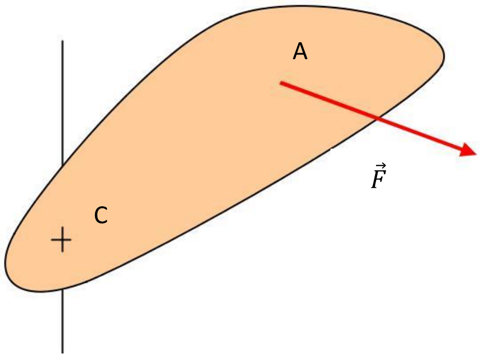


<u>Remarque :</u> Par abus de langage, le **moment** est parfois appelé le **couple**. Il s'agit effectivement de la même grandeur physique.

<u>Notation :</u> $\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F_{1/2}})}$ = Moment au point A engendré par la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$

Expression analytique :

Soit une force F dont le point d'application est A.
Le moment engendré par cette force F au point C est défini par la relation :



$$\boxed{\overrightarrow{M_C}(\vec{F}) = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F}}$$

$$\left\|\overrightarrow{M_C(\vec{F})}\right\| = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\vec{F}\|.\sin\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha\ l'angle\ entre\ \overrightarrow{CA}\ et\ \vec{F}$$

Unité du moment : **N.m**

Méthode de calcul du produit vectoriel :

$$\vec{\mathbf{V}}_1 \wedge \vec{\mathbf{V}}_2 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1.z_2 - z_1.y_2 \\ z_1.x_2 - x_1.z_2 \\ x_1.y_2 - x_2.y_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array}$$

Applications :

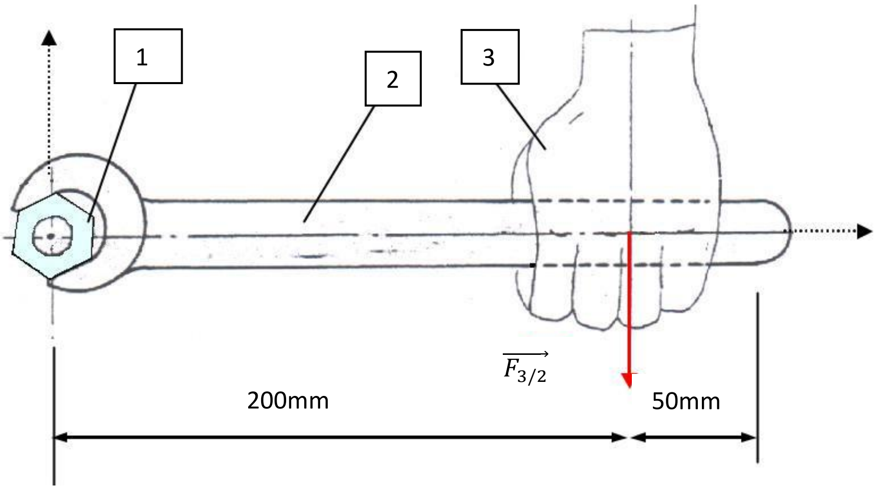
Serrage par clé plate

Un opérateur 3 serre l'écrou 1 par l'intermédiaire d'une clé plate 2.

Pour ce faire, il exerce un effort de 100 N au point A.

Déterminer le moment produit au point O (centre de l'écrou) par cet effort.

Déterminer ce moment si l'opérateur exerçait cet effort en B.

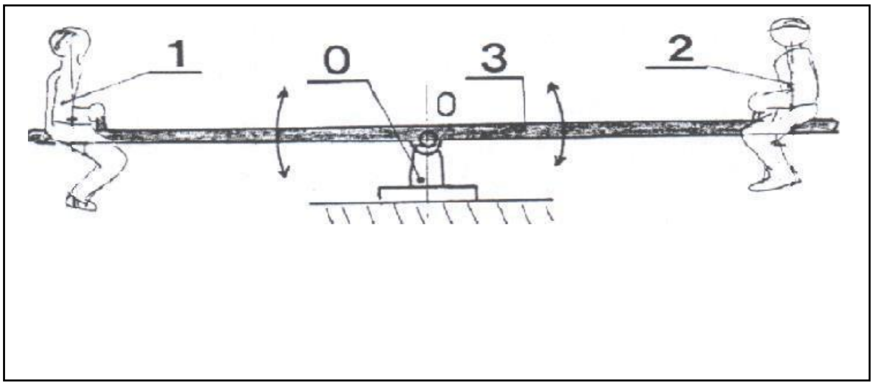


Balançoire

Deux personnes 1 et 2 se balancent sur une balançoire 3. L'individu 1 a une masse de 45kg et l'individu 2 une masse de 63kg. $G_1O=OG_2=1.5m$

Après avoir calculé les poids des 2 individus, représenter les sur la figure à l'échelle de votre choix.

Calculer les moments en O engendrés par ces forces.



Modélisation des Actions Mécaniques

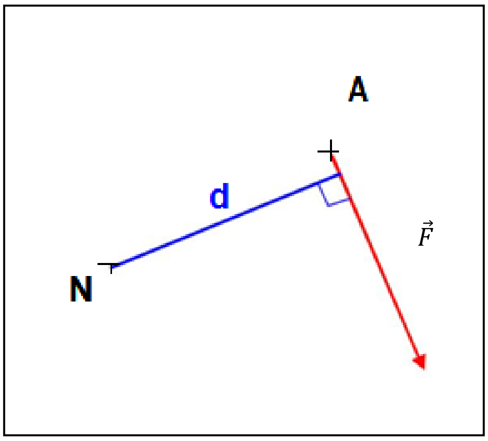
STI 2D

Le bras de levier : *une méthode de calcul de moment plus rapide*

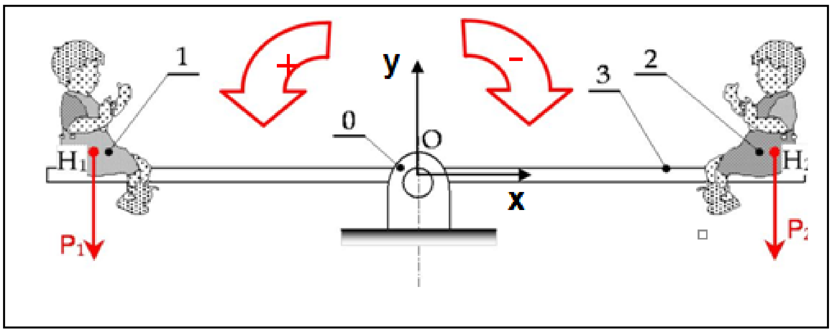
Si on travaille avec un problème plan, on remarque que le moment en un point N engendré par une force $\vec{F}$ peut se calculer ainsi :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{M_N}(\overrightarrow{F})\right\| = d.F}$$

Avec d : la plus petite distance entre $\vec{N}$ *et* $\vec{F}$ et la perpendiculaire à $\vec{F}$ passant par N

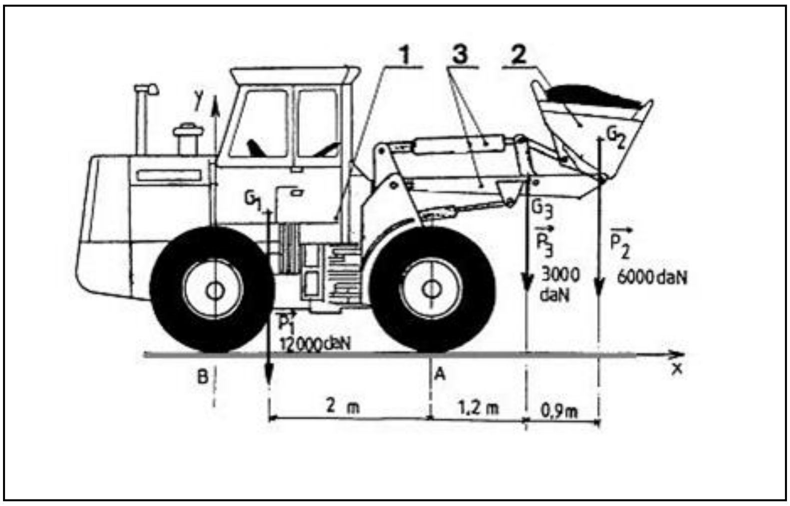


Convention de signe :
$\overrightarrow{P_1}$ fait tourner 3 dans le sens trigonométrique, le moment est positif.
$\overrightarrow{P_2}$ fait tourner 3 dans le sens horaire, le moment est négatif.



Application

En utilisant la méthode du bras de levier, calculer le moment au point A engendré par le poids du chargement $\overrightarrow{P_2}$ de l'engin de chantier.



V- Modélisation d’une AM sous forme d’un torseur

Définitions

Pour permettre une démarche cohérente dans les problèmes de statique, il a été choisi de représenter une action mécanique par un torseur .
Une A.M. est complètement définie lorsque nous connaissons les deux vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$. Nous allons donc regrouper ces deux vecteurs dans une entité mathématique appelée **Torseur**.

Le torseur associé à l’action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté :

Torseur de l’action l’action de 1 sur 2 de 1 sur 2

Vecteur-force de

$$\left\{\tau_{1/2}\right\}_B = {}_B\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{F_{1/2}} \\ \overrightarrow{M_B(F_{1/2})}\end{array}\right\}$$

RESULTANTE

MOMENT

Point de réduction du torseur (c’est-à-dire point où est exprimé le torseur)

Moment engendré par $\overrightarrow{F_{1/2}}$ au point B

Composantes de la résultante

Composantes du moment Résultant en A

Base de projection des vecteurs

Centre de réduction

$$\left\{\tau_{(2/1)}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R}_{(2/1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2/1)}\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c|c} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21}\end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Remarques :

- Le point A est un point quelconque.
- $\overrightarrow{R}_{(2/1)}$ et $\overrightarrow{M_A}_{(2/1)}$ sont appelés *éléments de réduction au point A*

du torseur $\{\tau_{(2\to 1)}\}$.

Torseurs particuliers

Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point et sur sa droite directrice.

$$\boxed{\{\tau_{(2/1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2/1)} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A(2/1)}} = \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\boxed{\{\tau_{(2/1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2/1)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A(2/1)}} \neq \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

⚠ **Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.**

Opérations entre torseurs

Changement de centre de réduction

Soit : $\{\tau_{(2/1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2/1)} \\ \overrightarrow{M_{A(2/1)}} \end{Bmatrix}$

Règle du transport d'un moment :

Pour connaître l'écriture du moment en un autre point, il suffit d'utiliser la règle du transport d'un moment, définit par la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{M_B(R_{2/1})} = \overrightarrow{M_A(2/1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{2/1}}}$$

Ecriture au point B : $\{\tau_{(2/1)}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2/1)} \\ \vec{M}_{B(2/1)} = \vec{M}_{A(2/1)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{(2/1)} \end{Bmatrix}$

Somme de deux torseurs

Soient : $\{\tau_{(2/1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2/1)} \\ \vec{M}_{A(2/1)} \end{Bmatrix}$

$\{\tau_{(3/1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(3/1)} \\ \vec{M}_{A(3/1)} \end{Bmatrix}$

alors : $\{\tau_{(2/1)}\} + \{\tau_{(3/1)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2/1)} + \vec{R}_{(3/1)} \\ \vec{M}_{A(2/1)} + \vec{M}_{A(3/1)} \end{Bmatrix}$

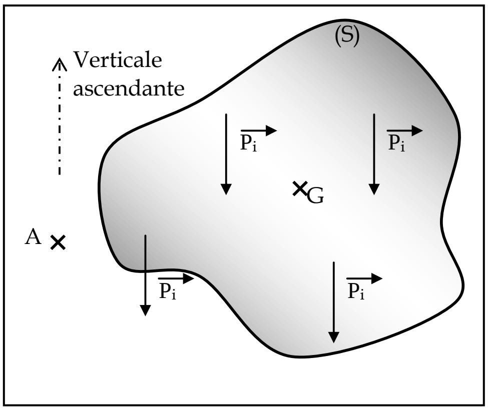
⚠ Pour pouvoir **additionner des torseurs, ils doivent tous être exprimés au même centre de réduction**.

- Il sera parfois nécessaire de réaliser, au préalable, un changement de centre réduction.
- Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.
- Les unités doivent être compatibles entre elles.

VI ACTIONS MECANIQUES PARTICULIERES

VI.1 Action mécanique de Pesanteur

L'action **mécanique de Pesanteur** exercée par notre planète Terre sur un solide S de masse m, est une action mécanique à distance car elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre la Terre et S.

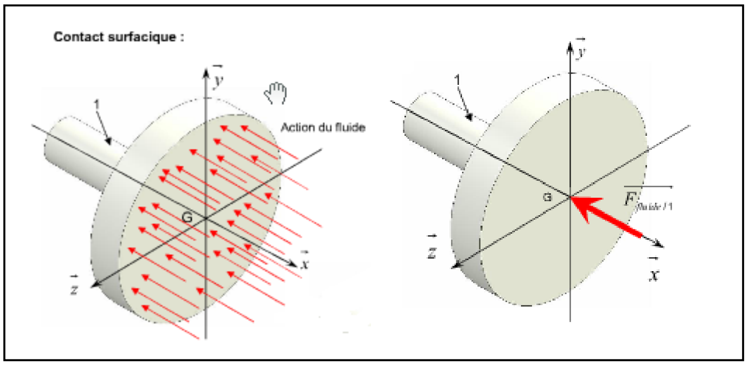


au centre de gravité G

$\{\tau_{(T/S)}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(T/S)} = \vec{P} = m.\vec{g} \\ \vec{M}_{G(T/S)} = \vec{0} \end{Bmatrix}$

VI.2 5.2 Action mécanique due à la pression d'un fluide sur une surface plane

Les actions mécaniques de contact d'un fluide sur une surface plane (S) se modélisent par un torseur glisseur au centre A de la surface (S) tel que :



avec :

- p : pression exercée par le fluide, sur la surface (S). Le fluide est supposé à pression constante,
- S : aire de (S) ;
- n : normale à la paroi orientée vers le fluide

$$\left\{\tau_{(f/s)}\right\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(f/S)} = -p.S.\vec{n} \\ \vec{M}_{A\,(f/S)} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Unités légales :	Autres unités :	Unités historiques:
p en Pa	p en MPa	p en bars
S en m²	S en mm²	S en cm²
$\left\Vert\vec{R}_{(f\to S)}\right\Vert$ en N	$\left\Vert\vec{R}_{(f\to S)}\right\Vert$ en N	$\left\Vert\vec{R}_{(f\to S)}\right\Vert$ en daN

0,1 MPa = 10^5 Pa = 1 bar

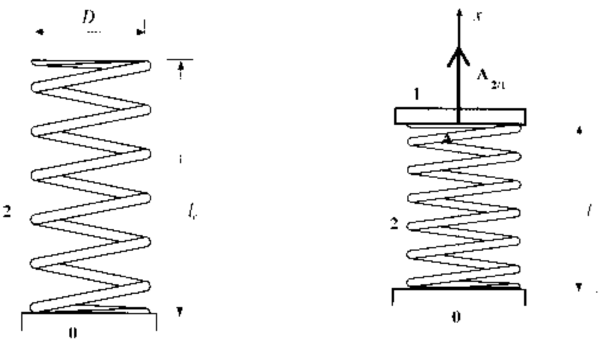
VI.1 5.3 Action mécanique due à un ressort agissant en traction ou compression

Soit un ressort hélicoïdal de longueur initiale L0 sollicité par des actions mécaniques axiales, le ressort se déforme et sa longueur devient L.
On modélisera l'action mécanique du ressort 2 sur la pièce 1 par le torseur suivant :

$$\boxed{\left\{\tau_{(2/1)}\right\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{R}}_{(2/1)} \\ \overrightarrow{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}\,(2/1)} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}}$$

Avec $\overrightarrow{R}_{(2 \to 1)} = \| \overrightarrow{F} \| . \overrightarrow{x}$ et : $\| \overrightarrow{F} \| =$ k | l - l_0 |

K : raideur ou coefficient de raideur du ressort en N/mm^2
l : longueur du ressort sous la charge F
l_0 : longueur libre du ressort



VII TORSEUR DES ACTIONS MECANIQUES TRANSMISSIBLES PAR UNE LIAISON PARFAITE

Une **liaison mécanique** entre deux pièces dite **parfaite** est caractérisée par :

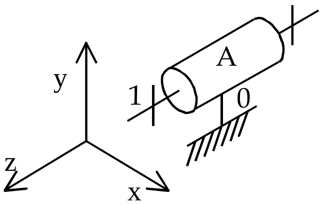
- Des volumes géométriquement parfaits et indéformables ,
- Des ajustements sans jeu ,
- Des contacts sans frottement.

Ce modèle est certes, très théorique, mais bien pratique pour réaliser nos calculs de mécanique.

VII.1 Méthode

Une Force $\vec{F}$, intégralement portée par $\vec{x}$, ne pourra être transmise par une liaison, que si cette dernière dispose d'un « obstacle » (de la matière en contact) dans cette même direction $\vec{x}$, interdisant la translation d'une pièce par rapport à l'autre.
Un Moment $\overrightarrow{M_A}$, intégralement porté par $\vec{y}$, ne pourra être transmis par une liaison, que si celle-ci dispose d'un « obstacle » dans cette même direction $\vec{y}$, interdisant la rotation d'une pièce par rapport à l'autre.

VII.2 Application: La liaison pivot



L_{01} : Liaison pivot parfaite d'axe $(A,\vec{z})$

Mobilités

$$\overrightarrow{Tr}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot}\begin{vmatrix}0\\0\\Rz\end{vmatrix}$$

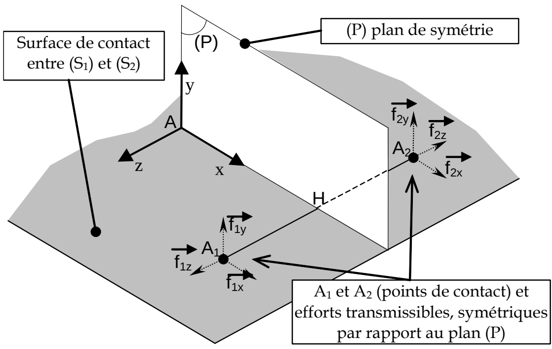
Torseur des actions mécaniques transmissibles par L_{01}

$$\{\tau_{(0/1)}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

VIII CAS DES PROBLEMES ADMETTANT UN PLAN DE SYMETRIE

Dans certains cas, l'étude du mécanisme dans l'espace peut être délicate et longue. On recherche alors une possibilité de réduire l'étude à un problème plan, sous certaines hypothèses.

VIII.1 Hypothèses



- La surface de contact possède une géométrie qui présente une symétrie par rapport à un plan . Il devra en être de même pour les actions mécaniques extérieures.
- Nous choisissons alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes du plan de symétrie.

VIII.2 Simplification

Lorsque les hypothèses précédentes sont réunies, l'écriture du torseur d'action mécanique transmissible par la liaison se simplifie. Il subsiste :

- Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie,
- La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie .

Dans notre exemple, le plan de symétrie est $(A, \vec{x}, \vec{y})$.

Allure générale (3D) : Simplification : Allure simplifiée (2D) :

$$\left\{\tau_{(2/1)}\right\} \; {}_A\!\begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(6 inconnues)

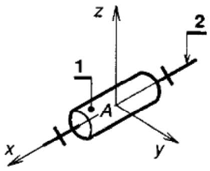
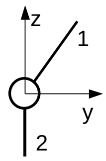
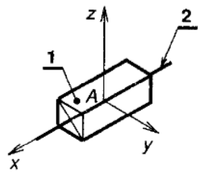
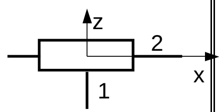
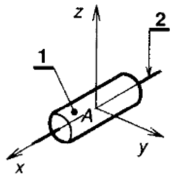
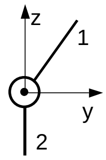
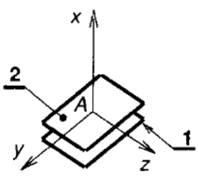
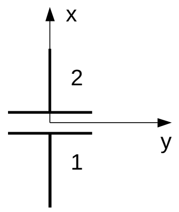
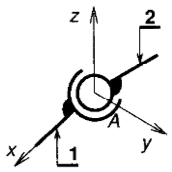
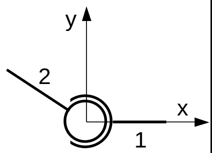
$$\left\{\tau_{(2/1)}\right\} \; {}_A\!\begin{Bmatrix} X_{21} & \cancel{L_{21}} \\ Y_{21} & \cancel{M_{21}} \\ \cancel{Z_{21}} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

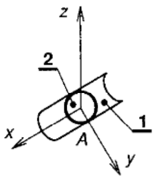
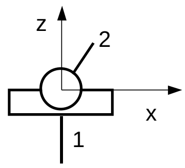
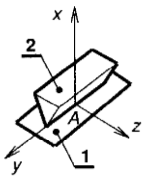
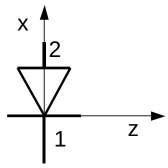
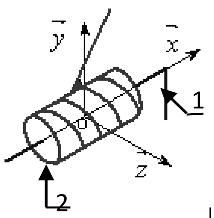
$$\left\{\tau_{(2/1)}\right\} \; {}_A\!\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(3 inconnues)

Modélisation des Actions Mécaniques

IX TORSEUR DES ACTIONS MECANIQUES TRANSMISSIBLES PAR UNE LIAISON PARFAITE

Désignation de la liaison	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plane
Pivot d'axe (A, $\vec{x}$)				Symétrie par rapport à (A, $\vec{y}$, $\vec{z}$)	
Glissière d'axe (A, $\vec{x}$)				Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{z}$)	
Pivot glissant d'axe (A, $\vec{x}$)				Symétrie par rapport à (A, $\vec{y}$, $\vec{z}$)	
Appui plan de normale (A, $\vec{x}$)				Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{y}$)	
Rotule de centre A				Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{y}$)	

Linéaire annulaire d'axe (A, $\vec{x}$)				Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{z}$)	
Linéaire rectiligne de normale (A, $\vec{x}$) et de contact (A, $\vec{y}$)				Symétrie par rapport à (A, $\vec{x}$, $\vec{z}$)	
Glissière hélicoïdale d'axe (O, $\vec{x}$)				Symétrie par rapport à (A, $\vec{y}$, $\vec{z}$)